***12(i). যদি $x^2+kx-6k=0$ এবং $x^2-2x-k=0$ সমীকরণ দুইটির একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকে তবে প্রমাণ কর যে, k এর মান কত?

(ii). যদি $px^2+qx+1=0$ এবং $qx^2+px+1=0$ সমীকরণ দুইটির একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $p+q+1=0$.

(iii). $mx^2+nx+l=0$ এবং $lx^2+nx+m=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $m+l=\pm n$ **(Dj-17)**

(iv). $f(x)=px^2+qx+r=0$ এবং $g(x)=rx^2+qx+p=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে p, q এবং r এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। **(R-19)**

(v). $P(x)=rx^2-2nx+4m=0$ এবং $Q(x)=mx^2+nx+r=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে, প্রমাণ কর যে, $(2m-r)^2+2n^2=0$ অথবা, $2m+r=0$ **(D-19)**

(i).সমাধানঃ মনে করি, $x^2+kx-6k=0$ এবং $x^2-2x-k=0$ সমীকরণের একটি সাধারন মূল α হলে, $\alpha^2+k\alpha-6k=0$..................(i)

$\alpha^2-2\alpha-k=0$....................(ii)

সমীকরণের (i) এবং (ii) নং হতে বজ্রগুণনের নিয়মানুসারে

পাই, $\dfrac{\alpha^2}{-k^2-12k}=\dfrac{\alpha}{-6k+k}=\dfrac{1}{-2-k}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{-(k^2+12k)}=\dfrac{\alpha}{-5k}=\dfrac{1}{-(2+k)}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{-(k^2+12k)}=\dfrac{\alpha}{-5k}$ **এবং** $\dfrac{\alpha}{-5k}=\dfrac{1}{-(2+k)}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{\alpha}=\dfrac{-(k^2+12k)}{-5k}$ **এবং** $\alpha=\dfrac{-5k}{-(2+k)}$

$\therefore \alpha=\dfrac{(k^2+12k)}{5k}$ **এবং** $\alpha=\dfrac{5k}{2+k}$

শর্তমতে, $\dfrac{(k^2+12k)}{5k}=\dfrac{5k}{2+k}$

$\Rightarrow (k^2+12k)(2+k)=(5k)^2$

$\Rightarrow 2k^2+k^3+24k+12k^2=25k^2$

$\Rightarrow 2k^2+k^3+24k+12k^2-25k^2=0$

$\Rightarrow k^3-11k^2+24k=0$

$\Rightarrow k(k^2-11k+24)=0$

$\therefore$ **হয়,** $k=0$

অথবা, $(k^2-3k-8k+24)=0$

$\Rightarrow k(k-3)-8(k-3)=0$

$\Rightarrow (k-3)(k-8)=0$

$\therefore (k-3)=0$

$\therefore k=3$

অথবা, $(k-8)=0$

$\therefore k=8$

$\therefore$ **k-এর মান 0,3,8**

(ii).সমাধানঃ মনে করি, $px^2+qx+1=0$ এবং $qx^2+px+1=0$ সমীকরণের একটি সাধারন মূল α হলে, $p\alpha^2+q\alpha+1=0$..................(i)

$q\alpha^2+p\alpha+1=0$..................(ii)

সমীকরণের (i) এবং (ii) নং হতে বজ্রগুণনের নিয়মানুসারে

পাই, $\dfrac{\alpha^2}{q-p}=\dfrac{\alpha}{q-p}=\dfrac{1}{p^2-q^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{q-p}=\dfrac{\alpha}{q-p}$ **এবং** $\dfrac{\alpha}{q-p}=\dfrac{1}{p^2-q^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{\alpha}=\dfrac{q-p}{q-p}$ **এবং** $\alpha=\dfrac{q-p}{p^2-q^2}$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{q-p}{q-p}$ **এবং** $\alpha=\dfrac{-(p-q)}{(p+q)(p-q)}$

$\therefore \alpha=1$ **এবং** $\alpha=\dfrac{-1}{(p+q)}$

শর্তমতে, $1=\dfrac{-1}{(p+q)}$

$\Rightarrow p+q=-1$

$\therefore p+q+1=0$

***13(i). $ax^2+bx+c=0$ এর একটি মূল $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণের একটি মুলের দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $2a=c$ অথবা, $(2a+c)^2=2b^2$.

(ii). $f(x)=ax^2+bx+c$ এবং

$g(x)=cx^2+bx+a$

$f(x)=0$ এর একটি মূল $g(x)=0$ সমীকরণের একটি দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $2a=c$ অথবা, $(2a+c)^2=2b^2$ **(D-17)**

(i). সমাধানঃ মনে করি, $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে,

$\therefore c\alpha^2+b\alpha+a=0.................(i)$

তাহলে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের আরেকটি মূল 2α হলে,

$\therefore a(2\alpha)^2+b.2\alpha+c=0$

$\therefore 4a\alpha^2+2b\alpha+c=0.................(ii)$

সমীকরণের (i) এবং (ii) নং হতে বজ্রগুণনের নিয়মানুসারে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bc-2ab}=\frac{\alpha}{4a^2-c^2}=\frac{1}{2bc-4ab}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{bc-2ab}=\frac{\alpha}{4a^2-c^2}$$

এবং $\dfrac{\alpha}{4a^2-c^2}=\dfrac{1}{2bc-4ab}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{\alpha}=\dfrac{bc-2ab}{4a^2-c^2}$ **এবং** $\alpha=\dfrac{4a^2-c^2}{2bc-4ab}$

$\therefore \alpha=\dfrac{bc-2ab}{4a^2-c^2}$ **এবং** $\alpha=\dfrac{4a^2-c^2}{2bc-4ab}$

শর্তমতে, $\dfrac{bc-2ab}{4a^2-c^2}=\dfrac{4a^2-c^2}{2bc-4ab}$

$\Rightarrow (4a^2-c^2)^2=(bc-2ab)(2bc-4ab)$

$\Rightarrow \{(2a)^2-c^2\}^2=b(c-2a).2b(c-2a)$

$\Rightarrow \{(2a-c)(2a+c)\}^2=2b^2(c-2a)^2$

$\Rightarrow (2a-c)^2(2a+c)^2=2b^2\{-(2a-c)\}^2$

$\Rightarrow (2a-c)^2(2a+c)^2=2b^2(2a-c)^2$

$\Rightarrow (2a-c)^2(2a+c)^2-2b^2(2a-c)^2=0$

$\Rightarrow (2a-c)^2\{(2a+c)^2-2b^2\}=0$

$\therefore$ **হয়,** $(2a-c)^2=0$

$\Rightarrow (2a-c)=0$

$\therefore 2a=c$

অথবা, $\{(2a+c)^2-2b^2\}=0$

$\therefore (2a+c)^2=2b^2$