***8(i).** $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মুলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে প্রমাণ কর যে, $p^2+4q^2=(1+2q)^2$

(ii). $x^2+(-1)^n px+q=0$ এর সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে প্রমাণ কর যে, $p^2+4q^2=(1+2q)^2$ যেখানে, $n=2$ **(All-18)**

(iii). $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মুলদ্বয়ের পার্থক্য r হলে p কে q এবং r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। **(All-18)**

(iv). $x^2-px+q=0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $p^2-4q-1=0$

(v). যদি $x^2-bx+c=0$ এবং $x^2-cx+b=0$ সমীকরণের মুলদ্বয়ের পার্থক্য ধ্রবক সংখ্যা হয় প্রমাণ কর যে, $b+c+4=0$

(i). সমাধানঃ মনে করি, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α,β .

$\therefore \alpha+\beta=\frac{-p}{1}$

$\therefore \alpha+\beta=-p$

এবং $\alpha.\beta=\frac{q}{1}$

$\therefore \alpha\beta=q$

শর্তমতে, $\alpha-\beta=\pm1$

$\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=(\pm1)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই]

$\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

$\Rightarrow(-p)^2-4q=1$

$\Rightarrow p^2-4q=1$

$\therefore p^2=1+4q$

$\therefore L.H.S=p^2+4q^2$

$=1+4q+4q^2$

$=1^2+2.1.2q+(2q)^2$

$=(1+2q)^2$

$=R.H.S$

(ii). সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণ,

$x^2+(-1)^n px+q=0$

$\Rightarrow x^2+(-1)^2 px+q=0$

$\therefore x^2+px+q=0$

Same-**(i)**

(iii). সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$

$\Rightarrow\frac{p-x+x}{(p-x)x}=\frac{1}{q}$

$\Rightarrow\frac{p}{px-x^2}=\frac{1}{q}$

$\Rightarrow pq=px-x^2$

$\therefore x^2-px+pq=0$

মনে করি, $x^2-px+q=0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α,β হলে,

$\therefore \alpha+\beta=\frac{p}{1}$

$\therefore \alpha+\beta=p$

এবং $\alpha.\beta=\frac{pq}{1}$

$\therefore \alpha\beta=pq$

শর্তমতে, $\alpha-\beta=\pm r$

$\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=(\pm r)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই]

$\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=r^2$

$\Rightarrow p^2-4pq=r^2$

$\Rightarrow p^2-4pq-r^2=0$

$\Rightarrow 1.p^2+(-4q).p+(-r^2)=0$

[সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর মূল নির্ণয় করার সুত্র হলোঃ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]

$\therefore p=\frac{-(-4q)\pm\sqrt{(-4q)^2-4.1.(-r^2)}}{2.1}$

$=\frac{4q\pm\sqrt{16q^2+4r^2}}{2}$

$=\frac{4q\pm\sqrt{4(4q^2+r^2)}}{2}$

$=\frac{4q\pm2\sqrt{(4q^2+r^2)}}{2}$

$=\frac{2\{2q\pm\sqrt{(4q^2+r^2)}\}}{2}$

$\therefore p=2q\pm\sqrt{(4q^2+r^2)}$

(iv).সমাধানঃ মনে করি, $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় $\alpha, \alpha + 1$.

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = -\dfrac{(-p)}{1}$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = p$

$\Rightarrow 2\alpha = p - 1$

$\therefore \alpha = \dfrac{p-1}{2}$

এবং $\alpha.(\alpha+1) = \dfrac{q}{1}$

$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha = q$

$\Rightarrow (\dfrac{p-1}{2})^2 + \dfrac{p-1}{2} = q$

$\Rightarrow \dfrac{(p-1)^2}{4} + \dfrac{p-1}{2} = q$

$\Rightarrow \dfrac{(p-1)^2 + 2(p-1)}{4} = q$

$\Rightarrow \dfrac{p^2 - 2.p.1 + 1^2 + 2p - 2}{4} = q$

$\Rightarrow \dfrac{p^2 - 2p + 1 + 2p - 2}{4} = q$

$\Rightarrow \dfrac{p^2 - 1}{4} = q$

$\Rightarrow p^2 - 1 = 4q$

$\therefore p^2 - 4q - 1 = 0$ **(Proved)**

(v). সমাধানঃ মনে করি, $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β .

$\therefore \alpha + \beta = -\dfrac{(-b)}{1}$

$\therefore \alpha + \beta = b$

এবং $\alpha.\beta = \dfrac{c}{1}$

$\therefore \alpha\beta = c$

আবার, মনে করি, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় γ, δ

$\therefore \gamma + \delta = -\dfrac{(-c)}{1}$

$\therefore \gamma + \delta = c$

এবং $\gamma.\delta = \dfrac{b}{1}$

$\therefore \gamma\delta = b$

শর্তমতে, $\alpha - \beta = \gamma - \delta =$ ধ্রবক

$\Rightarrow \alpha - \beta = \gamma - \delta$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই]

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$

$\Rightarrow b^2 - 4c = c^2 - 4b$

$\Rightarrow b^2 - 4c - c^2 + 4b = 0$

$\Rightarrow b^2 - c^2 + 4b - 4c = 0$

$\Rightarrow (b+c)(b-c) + 4(b-c) = 0$

$\Rightarrow (b-c)(b+c+4) = 0$

*****10(i)**. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হলে, প্রমাণ কর যে,

$(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \dfrac{(b^2 - 2ac)}{a^2c^2}$

(ii). $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় যথাক্রমে α, β হলে দেখাও যে,

$(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = \dfrac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$ **(D-17)**

(i). সমাধানঃ মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয়, α, β হলে,

$\therefore \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$...............$(i)$

এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) নং হতে পাই, $a\alpha + a\beta = -b$

$\therefore a\alpha + b = -a\beta$

আবার, $a\beta + b = -a\alpha$

$\therefore L.H.S = (a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$

$= (-a\beta)^{-2} + (-a\alpha)^{-2}$

$= \dfrac{1}{(-a\beta)^2} + \dfrac{1}{(-a\alpha)^2}$

$= \dfrac{1}{a^2\beta^2} + \dfrac{1}{a^2\alpha^2}$

$= \dfrac{1}{a^2}(\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\alpha^2})$

$= \dfrac{1}{a^2}(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2})$

$= \dfrac{1}{a^2}\{\dfrac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}\}$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(\frac{-b}{a})^2 - 2.\frac{c}{a}}{(\frac{c}{a})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}.\frac{(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a})}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{a^2}.\frac{(\frac{b^2 - 2ac}{a^2})}{\frac{c}{a^2}^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} \times \frac{(b^2 - 2ac)}{a^2} \times \frac{a^2}{c^2}$$

$$= \frac{(b^2 - 2ac)}{a^2c^2}$$

$$= R.H.S$$

(ii). সমাধানঃ মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয়, α, β হলে,

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} ....(i)$$

এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(i) নং হতে পাই, $a\alpha + a\beta = -b$

$$\therefore a\alpha + b = -a\beta$$

আবার, $a\beta + b = -a\alpha$

$$\therefore L.H.S = (a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3}$$

$$= (-a\beta)^{-3} + (-a\alpha)^{-3}$$

$$= \frac{1}{(-a\beta)^3} + \frac{1}{(-a\alpha)^3}$$

$$= -\frac{1}{a^3\beta^3} - \frac{1}{a^3\alpha^3}$$

$$= -\frac{1}{a^3}(\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\alpha^3})$$

$$= -\frac{1}{a^3}(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3})$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{(\frac{-b}{a})^3 - 3.\frac{c}{a}.(\frac{-b}{a})}{(\frac{c}{a})^3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}}{\frac{c^3}{a^3}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}}{\frac{c^3}{a^3}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{a^3} \times \frac{(-b^3 + 3abc)}{a^3} \times \frac{a^3}{c^3}$$

$$= -\frac{(-b^3 + 3abc)}{a^3c^3}$$

$$= \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$$

$$= R.H.S$$