1. দুইটা মূল নিয়ে সমীকরণ গঠন : মনে করি, α এবং β দুইটা মূল। **সুতরাং**

$x=\alpha,\beta$

$\Rightarrow x=\alpha, x=\beta$

$\Rightarrow x-\alpha=0, x-\beta=0$

$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\Rightarrow x^2-\beta x-\alpha x+\alpha\beta=0$

$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\therefore$ **দুইটা মূল নিয়ে সমীকরণ গঠন করার সুত্র,**

x^2 - (মুলদ্বয়ের যোগফল) x +মুলদ্বয়ের গুনফল=0

$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

2. দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর মুল এবং সহগের মধ্যে সম্পর্কঃ

আমরা জানি,

$ax^2+bx+c=0$

$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$\therefore x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=0$

অতএব, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ এবং

$x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=0$ সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

OR, মনে করি, α এবং β দুইটা মূল। **সুতরাং**

$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-2b}{2a}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

এবং

$\alpha\beta=(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$

$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$

$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$

$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$

$=\frac{4ac}{4a^2}$

$\therefore \alpha\beta=\frac{c}{a}$

যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α,β হয় তবে,

মুলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta=-x$ এর সহগ/ x^2 এর সহগ,

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

এবং মুলদ্বয়ের গুনফল, $\alpha\beta=$ ধ্রুবপদ / x^2 এর সহগ

$\therefore \alpha\beta=\frac{c}{a}$

*****1(i).** $4x^2-5x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে, $(\alpha+\frac{1}{\beta})$ এবং $(\beta+\frac{1}{\alpha})$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(ii). $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\alpha+\frac{1}{\beta}$ এবং $\beta+\frac{1}{\alpha}$ **(Ch-17)**

(iii). $8x^2-6x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a ও b হলে, এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $a+\frac{1}{b}$ এবং $b+\frac{1}{a}$ **(Ch-19)**

(iv). $px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূল দুটি α,β হলে $\frac{2}{\alpha}$ এবং $\frac{2}{\beta}$ মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। **(R-17)**

(v). $x^2 - 5x + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে $\frac{3}{5-\alpha}$ ও $\frac{3}{5-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। **(B-17)**

(vi). $ax^2 + bx - a = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হলে, $a\alpha + b$ এবং $a\beta + b$ মুলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

(vii). $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta$ এবং $\alpha - \beta$ মুলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

(viii). এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের যোগ বোধক মান হবে।

(ix). এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির সমষ্টি ও অন্তরফলের পরমমান হবে, যেখানে, $m = 0, n = 2, q = 1, r = -1$ **(Dj-19)**

(x). $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$ সমীকরণের বাস্তব মূল এবং $\frac{1}{4}$ মূল বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। **(J-19)**

(i).সমাধানঃ মনে করি, $4x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় মুলদ্বয় α, β হলে,

$\therefore \alpha + \beta = -(\frac{-5}{4}) = \frac{5}{4}$ **এবং** $\alpha\beta = \frac{1}{4}$

সুতরাং মূলদ্বয়ের যোগফল $= (\alpha + \frac{1}{\beta}) + (\beta + \frac{1}{\alpha})$

$= \alpha + \beta + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}$

$= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{5}{4} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}}$

$= \frac{5}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{4}{1}$

$= \frac{5}{4} + 5$

$= \frac{5 + 20}{4}$

$= \frac{25}{4}$

আবার, মূলদ্বয়ের গুনফল $= (\alpha + \frac{1}{\beta})(\beta + \frac{1}{\alpha})$

$= \alpha\beta + \alpha.\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.\beta + \frac{1}{\alpha\beta}$

$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta}$

$= \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{4} + 2 + 1 \times \frac{4}{1}$

$= \frac{1}{4} + 2 + 4$

$= \frac{1}{4} + 6$

$= \frac{1 + 24}{4}$

$= \frac{25}{4}$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমীকরণ**, x^2 - (মুলদ্বয়ের যোগফল) x +মুলদ্বয়ের গুনফল=0

$\Rightarrow x^2 - \frac{25}{4}x + \frac{25}{4} = 0$

$\Rightarrow \frac{4x^2 - 25x + 25}{4} = 0$

$\therefore 4x^2 - 25x + 25 = 0$

(vi). সমাধানঃ মনে করি, $ax^2 + bx - a = 0$ সমীকরণের সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হলে,

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $\alpha\beta = \frac{-a}{a}$

$\therefore \alpha\beta = -1$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= a\alpha + b + a\beta + b$

$= a\alpha + a\beta + 2b$

$= a(\alpha + \beta) + 2b$

$= a.(\frac{-b}{a}) + 2b$

$= -b + 2b$

$= b$

মূলদ্বয়ের গুনফল $= (a\alpha + b) + (a\beta + b)$

$= a^2\alpha\beta + \alpha ab + ab\beta + b^2$

$= a^2\alpha\beta + ab(\alpha + \beta) + b^2$

$= a^2(-1) + ab(\frac{-b}{a}) + b^2$

$= -a^2 - b^2 + b^2$

$= -a^2$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমীকরণ**, $x^2 - bx - a^2 = 0$

(vii).সমাধানঃ মনে করি, $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হলে,

$\therefore \alpha + \beta = \frac{2a}{1}$

$\therefore \alpha + \beta = 2a$

এবং $\alpha\beta = \frac{a^2 - b^2}{1}$

$\therefore \alpha\beta = a^2 - b^2$

এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= (2a)^2 - 4(a^2 - b^2)$

$= 4a^2 - 4a^2 + 4b^2$

$\therefore (\alpha - \beta)^2 = 4b^2$

$\therefore (\alpha - \beta) = \sqrt{4b^2}$

$\therefore (\alpha - \beta) = 2b$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2a + 2b$

মূলদ্বয়ের গুনফল

$= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 2a.2b = 4ab$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমীকরণ**, $x^2 - (2a + 2b)x + 4ab = 0$

$\therefore x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$

(viii).সমাধানঃ মনে করি, $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হলে,

$\therefore \alpha + \beta = \frac{2b}{1}$

$\therefore \alpha + \beta = 2b$

এবং $\alpha\beta = \frac{b^2 - a^2}{1}$

$\therefore \alpha\beta = b^2 - a^2$

এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= (2b)^2 - 4(b^2 - a^2)$

$= 4b^2 - 4b^2 + 4a^2$

$\therefore (\alpha - \beta)^2 = 4a^2$

$\therefore (\alpha - \beta) = \sqrt{4a^2}$

$\therefore (\alpha - \beta) = 2a$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমীকরণ**, $x^2 - (2b + 2a)x + 2b.2a = 0$

$\therefore x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$

*****2(i).** -1,8 মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii). $(2 + 2\sqrt{3}i)$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। **(D-19)**

(iii). $z = \alpha + i\beta$ যেখানে, α ও β বাস্তব সংখ্যা। হলে $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$ হলে z মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। **(C-17)**

(iv). $\frac{1}{3 + \sqrt{2}i}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

(v). $\frac{1}{2 - \sqrt{5}}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii).সমাধানঃ যেহেতু, প্রদত্ত মূল $(2 + 2\sqrt{3}i)$

সেহেতু অপর মূল হবে $(2 - 2\sqrt{3}i)$

$\therefore$ **নির্ণেয় মূলবিশিষ্ট সমীকরণ**,

x^2 - (মুলদ্বয়ের যোগফল) x +মুলদ্বয়ের গুনফল=0

$x^2 - (2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i)x + (2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + \{2^2 - (2\sqrt{3}i)^2\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + (4 - 4 \times 3i^2) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 12(-1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 12 = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 16 = 0$

(iv). সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\frac{1}{3 + \sqrt{2}i}$

$= \frac{(3 - \sqrt{2}i)}{(3 + \sqrt{2}i)(3 - \sqrt{2}i)}$

$= \frac{(3 - \sqrt{2}i)}{\{3^2 - (\sqrt{2}i)^2\}}$

$= \frac{(3 - \sqrt{2}i)}{9 - 2(-1)}$

$= \frac{(3 - \sqrt{2}i)}{9 + 2}$

$= \frac{(3-\sqrt{2}i)}{11}$

$= \frac{3}{11} - \frac{\sqrt{2}i}{11}$

যেহেতু, প্রদত্ত মূল $\frac{3}{11} - \frac{\sqrt{2}i}{11}$

সেহেতু অপর মূল হবে $\frac{3}{11} + \frac{\sqrt{2}i}{11}$

$\therefore$ **নির্ণেয় মূলবিশিষ্ট সমীকরণ**,

x^2 - (মুলদ্বয়ের যোগফল) x +মুলদ্বয়ের গুনফল=0

*****3(i).** $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে P-এর মান নির্ণয় কর।

(ii). $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপর মূলটির বর্গের সমান হলে m এর মান নির্ণয় কর। **(D-19)**

(iii). $mx^2 + nx + s = 0$ এর আলোকে

$m = 9, n = 2, s = -\frac{1}{3}(p+2)$ হলে প্রাপ্ত সমীকরণের একটি মূল যদি অপরটির বর্গের সমান হয় তবে p এর মান নির্ণয় কর। **(Ch-19)**

(iv). যদি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়,তবে দেখাও যে,

$p^3 - q(3p-1) + q^2 = 0$

(v). যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়,তবে দেখাও যে,

$c(a-b)^3 = a(c-b)^3$

(i). সমাধানঃ মনে করি, $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয়, α, α^2 হলে,

$\therefore \alpha + \alpha^2 = \frac{-6}{27}$

$\therefore \alpha + \alpha^2 = \frac{-2}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $\alpha.\alpha^2 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\therefore \alpha^3 = \frac{-(p+2)}{27} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) নং হতে পাই,

$9\alpha + 9\alpha^2 = -2$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 3\alpha + 6\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 3\alpha + 6\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha(3\alpha+1) + 2(3\alpha+1) = 0$

$\Rightarrow (3\alpha+1)((3\alpha+2) = 0$

$\therefore$ **হয়**, $(3\alpha+1) = 0$

$\Rightarrow 3\alpha = -1$

$\therefore \alpha = \frac{-1}{3}$

অথবা, $(3\alpha+2) = 0$

$\Rightarrow 3\alpha = -2$

$\therefore \alpha = \frac{-2}{3}$

(ii) নং সমীকরণে $\alpha = \frac{-1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$(\frac{-1}{3})^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow -\frac{1}{27} = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow 1 = p+2$

$\Rightarrow 1-2 = p$

$\therefore p = -1$

আবার, (ii) নং সমীকরণে $\alpha = \frac{-2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$(\frac{-2}{3})^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow -\frac{8}{27} = \frac{-(p+2)}{27}$

$\Rightarrow 8 = p+2$

$\Rightarrow 8-2 = p$

$\therefore p = 6$

$\therefore$ **p -এর মান -1,6**