এইচএসসি-২০২১

বিষয়: উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অ্যাসাইনমেন্ট নং- ০১

অ্যাসাইনমেন্ট শিরোনাম: ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

ক) প্রদত্ত ছকের সংখ্যাগুলো একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স A নির্দেশ করায়,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 8 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

যেহেতু $A \neq A^T$

সেহেতু A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স নয়।

খ) এখানে, $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

এবং $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+0+32 & 32+32+0 & 16+32+32 \\ 0+0+32 & 0+16+0 & 0+16+32 \\ 32+0+64 & 64+0+0 & 32+0+64 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 48 & 64 & 80 \\ 32 & 16 & 48 \\ 96 & 64 & 96 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 7A + 6I_3$$

$$= \begin{bmatrix} 48 & 64 & 80 \\ 32 & 16 & 48 \\ 96 & 64 & 96 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 48 & 64 & 80 \\ 32 & 16 & 48 \\ 96 & 64 & 96 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & 56 & 28 \\ 0 & 28 & 28 \\ 56 & 0 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 48-28+6 & 64-56+0 & 80-28+0 \\ 32-0+0 & 16-28+6 & 48-28+0 \\ 96-56+0 & 64-0+0 & 96-56+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 8 & 52 \\ 32 & -6 & 20 \\ 40 & 64 & 46 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^2 - 7A + 6I_3 = 2X$

$$\text{বা, } \begin{bmatrix} 26 & 8 & 52 \\ 32 & -6 & 20 \\ 40 & 64 & 46 \end{bmatrix} = 2X$$

$$\text{বা, } 2X = \begin{bmatrix} 26 & 8 & 52 \\ 32 & -6 & 20 \\ 40 & 64 & 46 \end{bmatrix}$$

$$\text{বা, } X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 26 & 8 & 52 \\ 32 & -6 & 20 \\ 40 & 64 & 46 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 26 \\ 16 & -3 & 10 \\ 20 & 32 & 23 \end{bmatrix}$$

গ) $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

এবং $B = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 5 \\ 10 & 0 & -5 \\ -10 & 20 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 40+80-40 & -80+0+80 & 20-40+20 \\ 0+40-40 & 0+0+80 & 0-20+20 \\ 80+0-80 & -160+0+160 & 40+0+40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

$$= 80\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 80I_3$$

আবার,

$$BA = \begin{bmatrix} 40+0+40 & 80-80+0 & 40-80+40 \\ 40+0-40 & 80+0+0 & 40+0-40 \\ -40+0+40 & -80+80+0 & -40+80+40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} = 80I_3$$

$\therefore AB = BA = 80I_3$

ঘ) $AC = CA = I_3$ হওয়ায়, $C = A^{-1}$

এখানে, $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

এবং $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$= 4(32 - 0) - 8(0 - 32) + 4(0 - 32)$

$= 128 + 256 - 128 = 256 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

এখন সহগুনকসমূহ:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 0 = 32$$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -(0-32) = 32$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 32 = -32$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(64-0) = -64$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 32 = 0$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -(0-64) = 64$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 16 = 16$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(16-0) = -16$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 0 = 16$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$

$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$

$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 32 & -64 & 16 \\ 32 & 0 & -16 \\ -32 & 64 & 16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$

$\therefore C = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$

ঙ) এখানে, $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

শ্রেণি-১, শ্রেণি-২ ও শ্রেণি-৩ ভুক্ত একজন শ্রমিকের বেতন যথাক্রমে x, y ও z ধরে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

এবং শ্রমিকদের মোট বেতন ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $B = \begin{bmatrix} 196000 \\ 88000 \\ 200000 \end{bmatrix}$

শর্তানুসারে, $AX = B$

বা, $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 196000 \\ 88000 \\ 200000 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 4x + 8y + 4z \\ 4y + 4z \\ 8x + 8z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 196000 \\ 88000 \\ 200000 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$4x + 8y + 4z = 196000$

$4y + 4z = 88000$

$8x + 8z = 200000$

এখন x , y ও z এর সহগগুচ্ছ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক D হলে, $D = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

$= 4(32-0) - 8(0-32) + 4(0-32)$

$= 128 + 256 - 128 = 256 \neq 0$

$\therefore$ সমীকরণ জোটটির সমাধান বিদ্যমান।

$D_x = \begin{vmatrix} 196000 & 8 & 4 \\ 88000 & 4 & 4 \\ 200000 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

$= 196000(32-0) - 8(704000 - 800000) + 4(0 - 800000)$

$= 3840000$

$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 196000 & 4 \\ 0 & 88000 & 4 \\ 8 & 200000 & 8 \end{vmatrix}$

$= 4(704000 - 800000) - 196000(0-32) + 4(0 - 704000)$

$= 3072000$

$D_z = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 196000 \\ 0 & 4 & 88000 \\ 8 & 0 & 200000 \end{vmatrix}$

$= 4(800000 - 0) - 8(0 - 704000) + 196000(0-32)$

$= 2560000$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{3840000}{256} = 15000$

$\therefore y = \frac{D_y}{D} = \frac{3072000}{256} = 12000$

$\therefore z = \frac{D_z}{D} = \frac{2560000}{256} = 10000$

$\therefore$ শ্রেণি-১ ভুক্ত একজন শ্রমিকের বেতন 15,000 টাকা।

$\therefore$ শ্রেণি-২ ভুক্ত একজন শ্রমিকের বেতন 12,000 টাকা।

$\therefore$ শ্রেণি-৩ ভুক্ত একজন শ্রমিকের বেতন 10,000 টাকা।